Uitwerking puzzel 94-4

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

Raad eens hoe we dat tellen moeten.

We begonnen met een oud rijmpje, dat een raadsel bevat:

De boeren van het Kennemerland
hebben tien vingers aan iedere hand
vijf en twintig aan handen en voeten
raad eens hoe we dat tellen moeten.

als je de regels anders indeelt:

De boeren van het Kennemerland
hebben tien vingers
aan iedere hand vijf
en twintig aan handen en voeten
raad eens hoe we dat tellen moeten.

dan verdwijnt een deel van het rijm, maar ook de raadselachtigheid van de tekst.

Het ging dus over tellen, niet met handen en voeten, maar wel zo handig mogelijk.

De puzzel is een variant op de Olympiade puzzel in Euclides 93-4 en is naar een idee van Frans van Hoeve.
We beginnen met een getal M dat uit louter enen bestaat en een getal N_0.
N_0 is dan het eerste getal uit een reeks met als voorschrift:
N_{i+1}=som van de cijfers van het product $N_i \cdot M$.

We introduceren het getal m=aantal enen van M. We noemen m en N_i maatjes als $N_i=N_{i+1}$.
Dus m=4 en N_i=36 zijn maatjes want 36 · 1111=39996, en de cijfersom van 39996 is 36.

In de Olympiade puzzel was $m = N_0 = 2017$.

We laten in deze uitwerking twee van onze trouwe oplossers aan het woord bij een aantal uitwerkingen. We hebben in die uitwerkingen notaties aangepast om die uniform te krijgen in de hele uitwerking, en hier en daar wat toelichting toegevoegd.

Opgave 1: Als de Olympiadepuzzel in 2018 was geweest, dus de rij die start met N_0=2018 en ook m=2018, dan was er wel een herhaling (cykel) ontstaan, maar de rij wordt niet constant. Echter dit jaar 2019 wordt de rij N-waarden die we krijgen met N_0=m=2019 na een tijdje wel constant en wel 18171 (er stond per ongeluk 17181, maar dat bleek voor niemand echt een probleem op te leveren). Dus N=18171 en m=2019 zijn maatjes. Tel hoe lang die rij is tot we vinden dat $N_i=N_{i+1}$.

Oplossing opgave 1: De lengte van de rij is 3

Voor de uitwerking opgave 1 laten we Hans Linders aan het woord:
(diverse andere oplossers deden het op dezelfde manier)

N_1: 2019 · M = 9 · M + 10 · M + 2000 · M, waarbij M bestaat uit 2019 enen:

```
        9 ...............  9 9 9 9 9    (lengte m)
      1 1 ...............  1 1 1 1 0
  2 2 2 2 ...............  2 2 0 0 0 +
  -------------------------------------
  2 2 4 3 ...............  3 3 1 0 9
```

Het middendeel van het product bestaat uit $m-3$ drieën en de cijfersom is dus:
$N_1 = 2 + 2 + 4 + 1 + 0 + 9 + 2016 \cdot 3 = 18 + 2016 \cdot 3 = 6066$
Op dezelfde manier berekent hij N_2 en N_3 met als resultaat: $N_2 = N_3$ =18171.
De lengte van de rij is dus 3.

Omdat we bij opgaven 2 en 3 alleen zoeken naar maatjes m, N is de index i niet van belang en kunnen we die weglaten.

Opgave 2a. Welk maatje m hoort bij N=87?

Oplossing opgave 2a: *m* = 13 is het maatje van 87

Voor de uitwerking opgave 2a laten we weer Hans Linders aan het woord:
(diverse andere oplossers deden het op dezelfde manier)

$87 \cdot M = 7 \cdot M + 80 \cdot M$

```
    7 7 .......  7 7 7
  8 8 8 .......  8 8 0 +     (lengte m + 1)
  ---------------------
  9 6 6 .......  6 5 7       (k zessen met k = m − 2)
```

Geeft $21 + k \cdot 6 = 87$. Dan is k =11, dus m = 13
Bij N = 87 hoort dus maatje m = 13.

Opgave 2b. We tellen het aantal paartjes *m*, *N* die maatjes zijn. Raad eens hoe we dat aantal tellen moeten voor alle $N \leq 100$.

Oplossing opgave 2b: er zijn 62 paartjes *m*, *N* die maatjes zijn voor $N \leq 100$

Uitwerking opgave 2b:

Om dit op te lossen schreven veel inzenders voor *N* = 1 – 99: *N*= 10*a* + *b* met *a* en *b* <10 en splitsten dat in 3 gevallen.
Voor de overzichtelijkheid geven we hieronder een schema waarin de getallen 1 – 99 te vinden zijn en waarin de 3 gevallen zijn aangegeven met een achtergrondkleurtje.

*a**b*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10		12						18	19
2	20	21			24			27	28	29
3	30						36	37		39
4	40		42			45	46	47	48	49
5	50				54	55		57		59
6	60			63	64	65	66			69
7	70		72	73		75				79
8	80	81	82	83	84	85		87		89
9	90	91	92	93		95	96			99

Zwarte getallen in het gele gebied:
a = 0 of *b* = 0 of a + b = 3 of *a* + *b* = 9.
Rode getallen in het gele gebied:
a + *b* = 6 en *a* is even

Zwarte getallen in het roze gebied:
a + *b* = 10 of *a* + *b* = 12 of *b* = 9
Rode getallen in het roze gebied:
a + *b* = 11 en a even,
a + *b* = 13 en a 4-voud
a + *b* = 14 en a 5-voud
a + *b* = 15 en a even

Zwarte getallen in het groene gebied:
b | 90 (*b* is deler van 90)

De tabel wordt hieronder nader toegelicht.

We schrijven *N* steeds als *ab*, dus *N* = 10*a* + *b*. We vermelden voor alle drie de gevallen de cijfersom van het product $M \cdot N$ die we later opnieuw nodig hebben.

1) *a* + *b* < 10 (gele achtergrond in het schema):
de vermenigvuldiging $M \cdot N$ wordt dan:

	b	………	*b*	*b*	*b*		
a	*a*	………	*a*	*a*	0	+	(lengte *m* + 1)
a	*a+b*	………	*a+b*	*a+b*	*b*		

De cijfersom van $M \cdot N$ is *m*(*a* + *b*)

De cijfersom moet gelijk zijn aan *N*, dus: *m*(*a* + *b*) = *N* = 10*a* + *b*.
Dat geeft de vergelijking: $m = \frac{10a + b}{a + b} = \frac{9a}{a+b} + 1$

Er is dus precies één maatje m als $(a + b) \mid 9a$

Dit is het geval als (zwarte getallen in het gele gebied, in totaal 28):
$a = 0$ of $b = 0$ of $a + b = 3$ of $a + b = 9$

of als (rode getallen in het gele gebied, in totaal 2):
als $a + b = 6$ en a is even

2) $a + b \geq 10$ en $a < 9$ (roze achtergrond in het schema):
de vermenigvuldiging $M \cdot N$ wordt dan:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & b & b & \ldots\ldots & b & b & b \\
a & a & a & \ldots\ldots & a & a & 0 \\ \hline
a+1 & a+b-9 & a+b-9 & \ldots\ldots & a+b-9 & a+b-10 & b
\end{array} \quad + \qquad \text{(lengte } m + 1\text{)}$$

De cijfersom van $M \cdot N$ is $a + 1 \; + \; (m - 2)(a + b - 9) \; + \; a + b - 10 \; + \; b =$
$m(a + b - 9) + 9$

Dit geeft de vergelijking:
$m(a + b - 9) + 9 = N = 10a + b$
$m(a + b - 9) + 9 = 10a + b$ dus $m = \frac{10a + b - 9}{a + b - 9} = \frac{9a}{a + b - 9} + 1$
Er is dus precies één maatje m als $(a + b - 9) \mid 9a$

Dit is het geval als (zwarte getallen in het roze gebied, in totaal 20):
$a + b - 9 = 1$ dus $a + b = 10$,
$a + b - 9 = 3$ dus $a + b = 12$
$a + b - 9 = a$ dus $b = 9$

of als (rode getallen in het roze gebied, in totaal 5):
$a + b - 9 = 2$ (dus $a + b = 11$) en a even,
$a + b - 9 = 4$ (dus $a + b = 13$) en a 4-voud of
$a + b - 9 = 5$ (dus $a + b = 14$) en a 5-voud
$a + b - 9 = 6$ (dus $a + b = 15$) en a even

3) $a=9$ en $b>0$ (groene achtergrond in het schema):
Dan is de voorste term 9+1=10 dus die moeten we apart bekijken.

de vermenigvuldiging $M \cdot N$ wordt dan:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & b & \ldots\ldots & b & b & b \\
 & 9 & 9 & \ldots\ldots & 9 & 9 & 0 \\ \hline
1 & 0 & b & \ldots\ldots & b & b-1 & b
\end{array} \quad + \qquad \text{(lengte } m + 2\text{)}$$

De cijfersom van $M \cdot N$ is $1 \; + \; 0 \; + \; (m - 2)\, b \; + \; b - 1 \; + \; b \; = m \cdot b$

Dit geeft de vergelijking:
$m \cdot b = 90 + b$, dus $m = \frac{90+b}{b} = \frac{90}{b} + 1$
Er is dus precies één maatje *m* als $b \mid 90$

Dat is het geval als (zwarte getallen in het groene gebied, in totaal 6):
b = 1, 2, 3, 5, 6 of 9

We tellen er zo dus 28 + 2 + 20 + 5 + 6 = 61, en dan hebben we nog *N* = 100, die natuurlijk ook voldoet.
In totaal dus 62 oplossingen.

Opgave 3a. Er zijn waarden van *N* waarmee voor niet te kleine *m* de opvolger van *N* gelijk is aan *m*, zoals bijvoorbeeld voor *N* = 1 die immers wordt opgevolgd door de som van de cijfers van $N \cdot M$ en dat is *m* voor elke *m*. Maar er zijn er meer. De vraag is natuurlijk: hoeveel? Raad eens hoe we dat aantal tellen moeten voor alle $N \leq 100$.
Opmerking: Met niet te kleine *m* bedoelen we dat *m*≥aantal cijfers van *N*.

Oplossing opgave 3a: er zijn 4 waarden van $N \leq 100$ waarvoor voor elke (niet te kleine) waarde van *m* de opvolger van *N* gelijk is aan *m*.

Uitwerking opgave 3a:

De opvolger van *N* moet nu voor alle (niet te kleine) waarden gelijk zijn aan *m*. Dat betekent dat als *m* één groter wordt ook de cijfersom met één toeneemt, en dus dat in het product het zich herhalende cijfer in het middendeel 1 moet zijn.
Nemen we weer voor *N* < 100: *N* = 10*a* + *b* dan onderscheiden we weer de 3 gevallen uit opgave 2b:

1) *a* + *b* < 10: het cijfer in het middendeel is dan *a* + *b*, dus moet *a* + *b* = 1. Dat levert alleen de (triviale) oplossingen *N* = 1 en *N* = 10.
2) *a* + *b* ≥ 10 en *a* < 9. het herhalende cijfer in het middendeel van het product is dan *a* + *b* – 9, dus moet *a* + *b* – 9 = 1, dus *a* + *b* = 10. Echter, zoals we zagen in opgave 2b, is de cijfersom *m*(*a* + *b* – 9) + 9 en dat wordt, met *a* + *b* = 10 gelijk aan *m* + 9, en niet *m*. Dit levert dus geen oplossingen op.
3) *a* = 9 en *b* > 0. Het herhalende cijfer in het middendeel is dan *b*, dus moet *b* = 1, dus *N* = 91.
   De som van de cijfers is dan $m \cdot b$ (zie opg 2b) en met *b* = 1 krijgen we dus voor alle *m*(>1) cijfersom *m*.

Natuurlijk is ook *N* = 100 een oplossing dus we hebben voor $N \leq 100$ vier oplossingen: 1, 10, 91 en 100.

Opgave 3b. Idem maar nu voor $N \leq 10.000$.

Oplossing opgave 3b: er zijn 15 waarden van $N \leq 10.000$ waarvoor voor elke (niet te kleine) waarde van *m* de opvolger van *N* gelijk is aan *m*.

Voor de uitwerking van opgave 3b laten we Harm Bakker aan het woord:

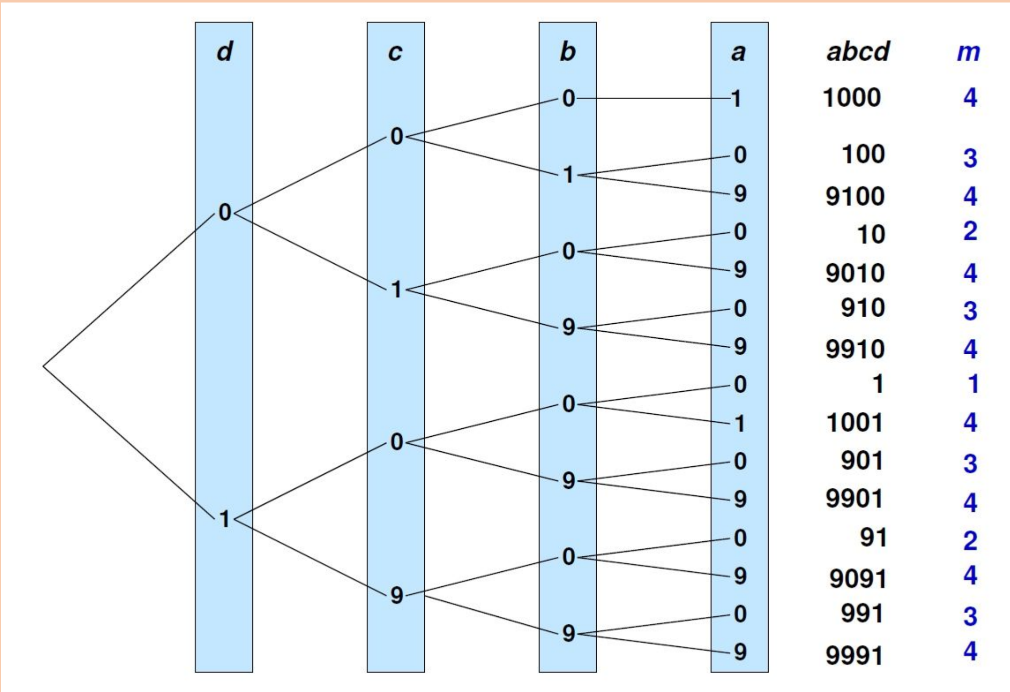
We zoeken nu getallen *abcd*, waarbij we ook toestaan dat een of meer (leidende) cijfers gelijk zijn aan 0. De figuur hieronder visualiseert de vermenigvuldiging.

			|	1	....	1	|	1	1	1	1
											abcd x
			|	*d*	....	*d*	|	*d*	*d*	*d*	*d*
		c	|	*c*	....	*c*	|	*c*	*c*	*c*	
	b	*b*	|	*b*	....	*b*	|	*b*	*b*		
a	*a*	*a*	|	*a*	....	*a*	|	*a*			
z	*y*	*x*	|	*h*	....	*h*	|	*p*	*q*	*r*	*d*

Getallen met vier cijfers

Wil de cijfersom van de optelling gelijk zijn aan *m*, dan kunnen er op de onderste regel geen cijfers groter dan 1 staan. *)

Nu is het een kwestie van systematisch nagaan wat de mogelijkheden zijn. In de figuur hieronder is het resultaat van dit proces weergegeven.



De oplossingen in een boomdiagram

*) Aan het eind van de uitwerking vindt u een toelichting op deze bewering.

Als alle potentiële oplossingen zijn bepaald, dan moeten we nog nagaan of het ook daadwerkelijk oplossingen zijn. Dat blijkt onverwacht eenvoudig te zijn. Aangevuld met de eis dat m minstens zo groot moet zijn als het aantal cijfers van N, komen we tot de 15 oplossingen die ook in de figuur zijn weergegeven.

Met elke $N_0 = m$ krijgen we altijd een rij getallen met vaak een aanloop en dan een cykel zoals voor $N_0 = m = 2018$.

Frans heeft met de computer bepaald dat voor elke rij die start met $N_0 = m < 10000$ je altijd in uiterlijk 14 stappen weer een N_i vindt die al eerder in de rij voorkomt, dus zeker met een cykel van lengte maximaal 14.

Opgave 4. Raad eens hoe we moeten tellen wat de grootste cykel is van de rijen die starten met $m = 2$ (dus $M = 11$) en $N_0 < 100$?

Oplossing opgave 4: voor $m = 2$ is de langste cykel 6.

Voor de uitwerking van opgave 4 laten hier weer graag Harm Bakker aan het woord:

Gevraagd wordt om voor $N_0 < 100$ en $m = 2$ (dus $M = 11$) te bepalen wat de maximale cykellengte is.
We volgen maar weer het gevalsonderscheid uit opgave 2b, met $N_i = 10a + b$ *)

1) $a + b < 10$: de cijfersom van $M \cdot N_i$ is $m(a + b)$. Dus is $N_i + 1 = 2(a + b) \leq 18$.
   En alle getallen ≤ 18 voldoen weer aan $a + b < 10$
   Dat betekent dat de verzameling natuurlijke getallen ≤ 18 een bassin is, als je er in zit, kom je er niet meer uit.

2) $a + b \geq 10$ en $a < 9$: de cijfersom van $M \cdot N_i$ is $m(a + b - 9) + 9$.
   Dus is $N_i + 1 = 2(a + b - 9) + 9 = 2(a + b) - 9$. Omdat $a < 9$ is $a + b \leq 17$, dus $N_i + 1 \leq 34 - 9 = 25$. Met uitzondering van 19 voldoen al deze waarden aan $a + b < 10$.
   Dat betekent dat we na nog een iteratie in het bassin terecht komen.
   Even apart kijken naar de waarde 19: de opvolger is $2(1 + 9) - 9 = 11$, zodat ook deze naar het bassin wordt geleid.

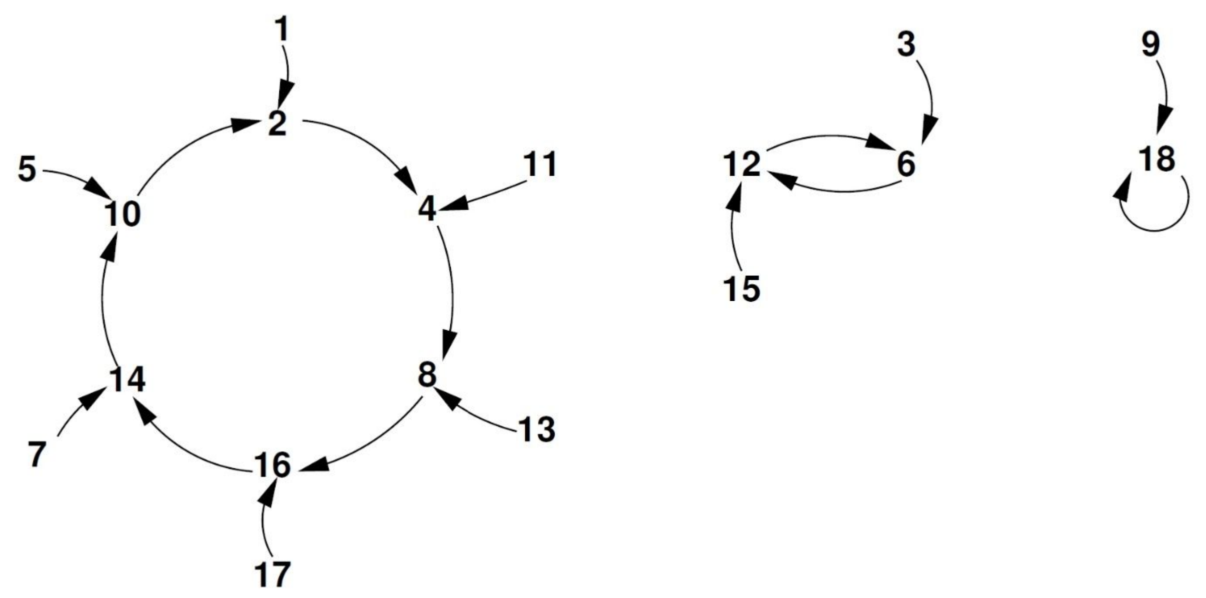
3) $a = 9$ en $b > 0$; de cijfersom van $M \cdot N_i$ is $m \cdot b$.
   Dus is $N_i + 1 = 2b$. Aangezien $b \leq 9$ zijn de waarden ≤ 18, dus na één iteratie zitten we in het bassin.

De conclusie van bovenstaande is, dat na een klein aantal iteraties het bassin wordt bereikt. Dat betekent dat cykels zich alleen in het bassin kunnen bevinden. We bepalen de functiewaarden in het bassin: zie de tabel hieronder

*) We vonden voor alle drie de gevallen de cijfersommen bij opgave 2b.

N_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
N_{i+1}	2	4	6	8	10	12	14	16	18	2	4	6	8	10	12	14	16	18

Maar een plaatje is duidelijker



De conclusie is dat de langste cykel een lengte zes heeft.

Behalve de langste cykel is het ook aardig te kijken of we een langste staart kunnen vinden. We zoeken dan een startgetal van waaruit we een aantal stappen kunnen doen voor we in het bassin terecht komen. We weten al dat we dan moeten zoeken in de tweede categorie van het gevalsonderscheid: $a + b \geq 10$ met $a < 9$. We zoeken een functiewaarde die buiten het bassin valt, dus $19 \leq N_i \leq 25$. In de volgende iteratiestap willen we terecht komen op een van de staartjes aan de grote cykel in de tabel hieronder. Maar even rekenen:

N_i	19	20	21	22	23	24	25
N_{i+1}	11	4	6	8	10	12	14

Functiewaarden net buiten het bassin

We zien dat alleen 19 voldoet. Nu nog even de originelen bij 19 vinden: $2 \cdot (a + b) - 9 = 19$ geeft $a + b = 14$. Kies bijvoorbeeld 77 als startpunt.
We krijgen dan een maximale staart met drie elementen 77 ➔ 19 ➔ 11 die wordt gevolgd door de cykel van zes elementen 4 ➔ 8 ➔ 16 ➔ 14 ➔ 10 ➔ 2.

Toelichting bij opgave 3b m.b.t de bewering:

Wil de cijfersom van de optelling gelijk zijn aan m, dan kunnen er op de onderste regel geen cijfers groter dan 1 staan.

We vermenigvuldigden in de uitwerking van opgave 3b een getal M bestaande uit m enen met een getal N met 4 cijfers a, b, c en d met de eis dat de som van de cijfers van het product gelijk moet zijn aan m voor elke m groter dan een bepaald minimum.
Hieronder nog eens een weergave van het product waarin kolommen zijn genummerd van rechts naar links, te beginnen bij 1:

m+3	m+2	m+1	m	…….	5	4	3	2	1
			d	…….	d	d	d	d	d
		c	c	…….	c	c	c	c	
	b	b	b	…….	b	b	b		
a	a	a	a	…….	a	a			
z	y	x	1	…….	1	p	q	r	d

We lieten bij opgave 3a al zien dat de cijfers van het product in het zich herhalende midendeel 1 moet zijn. Die enen zijn hierboven al ingevuld.

Een aantal inzenders probeerde de zaken modulo 9 te bekijken, en dat is zeker zinnig.
Er geldt natuurlijk: de 9-som van m is gelijk aan die van M en dus geldt $M \equiv m$ mod 9.
En ook $M \cdot N \equiv$ cijfersom van ($M \cdot N$) mod 9, en omdat de cijfersom van M . N gelijk moet zijn aan m: $N \cdot m \equiv m$ mod 9 voor elke willekeurige m. Dat kan alleen als $N \equiv 1$ mod 9 dus N is een 9-voud +1. Dus moet ook de cijfersom van N een 9-voud +1 zijn. We kiezen t zo dat $9t + 1$ de cijfersom van N is.
Dat kunnen we gebruiken om de bewering van Harrm te onderbouwen.

We kijken eerst naar de kolommen in het constante middendeel: de som van de cijfers in elke kolom is $9t$+1, en de carry C van elke kolom naar de volgende is ook voor allemaal gelijk. Voor elk van deze kolommen moet dus gelden: $9t + 1 + C = 1 + 10C$, waaruit volgt: $C = t$. Deze carry $C = t$ wordt dus ook overgedragen naar kolom m+1.

Als we kijken naar 2 kolommen waarvan het kolomnummer m verschilt (bv kolom 2 en kolom m + 2) dan valt op dat in de twee kolommen samen alle cijfers van N 1x voorkomen. De som van de twee kolommen samen is dus $9t + 1$. Die $9t + 1$ plus de carry van de voorgaande kolommen (1 en m+1) naar de kolommen 2 en m + 2 bepaalt het totaal van de 2 kolomsommen.
We gaan kolom voor kolom bekijken wat dat betekent:

Voor de de kolommen 1 en m + 1 geldt: in beide kolommen samen staan alle cijfers van N, en dat is bij elkaar $9t + 1$. De carry naar kolom m + 1 is t en die naar kolom 1 is nul, dus de carry naar beide kolommen samen is t.
Tellen we alle cijfers en de carry naar beide kolommen op dan hebben we dus $9t + 1 + t = 10t + 1$

Vòòr het "doorschuiven" van de tientallen naar de volgende kolom hebben we in beide kolommen samen een som van $10t + 1$. Van die $10t + 1$ wordt een aantal tientalllen als carry doorgeschoven

naar de kolommen 2 en *m* + 1, en de rest komt in som onderaan terecht, deels in kolom 1, deels in kolom *m* + 1 (in het voorbeeld hierboven *x* en *d*). Die rest kan alleen 1 of 11 zijn ($x + d \leq 18$)

Dat betekent dat *x* + *d* ofwel gelijk is aan 1 ofwel aan 11. 11 is natuurlijk te veel, immers we krijgen *m* – 4 enen in het middendeel, dus mag de som van *x*, *y*, *z*, *p*, *q*, *r* en *d* niet groter worden dan 4 (merk op dat dit argument ook geldig is voor nog grotere waarden van *N*, tot (minstens) 10^{11} toe!).
Dus *x* + *d* = 1 en van *x* en *d* is er één gelijk aan 1 en één gelijk aan 0.
De overgebleven 10*t* moet verdeeld worden over de carrys naar kolommen 2 en m+2 en dus is de gezamelijke carry naar de kolommen 2 en *m* + 2 opnieuw gelijk aan *t* .
En dus kunnen we voor de som van de kolommen 2 en *m* + 2 dezelfde redenering maken, en zo verder voor alle 4 de kolommen van het rechterdeel. Daarmee is bewezen: alle cijfers in het product zijn 0 of 1.